

АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУЧИВАНИЯ И СКОРОСТИ
ВЫПУСКА ЭНЕРГИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК + МЕТАЛЛ + ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК
КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ
С МЕЖСЛОЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ**

Специальность: 2002.01– Механика деформируемого
твердого тела
Отрасль науки: Математика
Соискатель: **Джафарова Фазиля Ильяс кызы**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку–2021

Диссертационная работа выполнена в кафедре «Общие технические предметы» факультета Физика и технические предметы Гянджинского Государственного Университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Рзаев Оруджали Гусейнгулу оглы

Официальные оппоненты: док. наук по мат., профессор
Искендеров Рамиз Азиз оглы

кан. физ.-мат. наук, доцент
Мамедов Халид Биннет оглы

док. фил. по мат., доцент
Сейфуллаев Фамиль Ализаде оглы

Диссертационный совет FD 2.17 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Бакинского Государственного Университета

Председатель диссертационного совета:
действительный член НАНА, д.ф.-м.н, профессор

_____ **Мехтиев Магомед Фарман оглы**

Ученый секретарь диссертационного совета: д.н. по мех., доцент

_____ **Фатуллаева Лаура Фаик кызы**

Председатель научного семинара: д.н. по математике, профессор

_____ **Ахмедов Натик Гаракиши оглы**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень изученности темы. Развитие техники в различных ведущих отраслях современной промышленности, такие как авиастроение, машиностроение, кораблестроение, а также в военной промышленности, настоятельно требует применение композитных материалов, в том числе слоистых материалов, содержащие слои (или компоненты) из пьезоэлектрических материалов. В мировой научной литературе пьезоэлектрические материалы обозначаются через PZT.

Успешные применения этих слоистых материалов, а также элементов конструкций из этих материалов требуют основательное теоретическое исследование их по расслоению и разрушению. Представленная диссертационная работа посвящена к теоретическому изучению проблем расслоения-выпучивания, а также разрушения трехслойной PZT+металл+PZT круговой пластины с межфазными круговыми трещинами.

Обычно тонкие пленки или пластины из PZT используются как сенсоры или актуаторы для контролирования работ элементов конструкций, такие как пластины и оболочки, изготовленные из традиционных материалов. При склеивании указанных сенсоров и актуаторов на поверхности несущего материала часто появляется не склеенные зоны. Именно, эти не склеенные зоны являются очагами локального выпучивания (или потери устойчивости) PZT слоев при воздействии соответствующих электромеханических сжимающих усилий. Следовательно, для контролирования и предотвращения отмеченного локального выпучивания необходимо провести соответствующие теоретические исследование. Однако до недавних времен такие исследования полностью отсутствовали, несмотря на то, что задачи устойчивости пластин и стержней из PZT материалов привлекли внимание исследователей. Этими исследователями установлено, что пьезоэлектричество материала пластин и стержней способствует увеличению

значений соответствующих сжимающих критических усилий. Имеется также ряд других исследований, относящихся к динамике, статике и устойчивости систем, состоящие из PZT и упругих компонентов.

Все исследования, проведенные для круговых трещин в пьезоэлектрических материалах, были выполнены в рамках двух предположений:

- слои, которые содержат трещину, являются бесконечными в радиальном направлении;
- виды и уровни внешнего электро-механического нагружения позволяют использовать классическую линейную теорию электро-упругости для пьезоэлектрических материалов при исследовании соответствующих задач.

Известно, что классическая линейная теория электро-упругости для пьезоэлектрических материалов не могут учитывать влияние внешних усилий действующих в направлении параллельно к плоскости, на котором находится трещина, на значения коэффициента интенсивности напряжения (КИН) и скорости выпуска энергии (СВЭ) на фронте трещин. Отметим, что соответствующий подход, который позволяет учитывать влияния указанных выше усилий на значения КИН и СВЭ для чисто упругих материалов в рамках определенных разграничений было исследовано.

Следует отметить, что указанный подход основывается на линеаризации геометрически-нелинейных уравнений. При линеаризации напряженное состояние, вызванное от внешних усилий и действующих в направлении, параллельно к плоскости, на котором расположены трещины, принимается как начальное напряжения, а напряженное состояние, вызванное от усилий, действующих на поверхности трещин, принимается как дополнительное напряженное состояние. Указанная выше линеаризация проводится относительно величин этого дополнительного состояния. Для правомочности отмеченной линеаризации предполагается, что величины усилий, вызывающие начальное состояние, значительно больше, чем величины усилий, вызывающие дополнительное напряженное

состояние. В результате изложенной линеаризации получается так называемое трехмерное линеаризованное уравнение, имеющее коэффициенты, которые содержит усилие, действующие в направлении, параллельно к плоскости, на котором расположена трещина. С помощью этих коэффициентов появляется возможность учитывать влияния внешних усилий, действующих в направлении, параллельно к плоскости расположения трещин, на величины КИН и СВЭ на фронтах трещин.

Несмотря на многие исследования в этой области до сих пор нет исследований о влиянии начальных напряжений в вышеизложенном смысле на КИН и СВЭ на фронте круговой трещина в пьезоэлектрическом материале или на межфазной плоскости между пьезоэлектрическим и упругим материалами.

В диссертационной работе исследуются вопросы, относящиеся к задачам разрушения, т.е. к задачам межфазных круговых трещин в трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины. А именно, рассматривается задача для определения электро-механических энергий указанной пластины с межфазными круговыми трещинами, а также, рассматривается задача для определения скорости освобождения энергии (т.е. ERR-Energy Rebeate Rate: Скорость Выпуска Энергии (СВЭ)) на фронте трещин.

Объект и предмет исследования. В представленной диссертационной работе исследуется СВЭ на фронте круговых межфазных трещин, находящихся в трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластине. Здесь кроме этого исследуются влияния радиального сжимающего или растягивающего начального напряжения на значение СВЭ.

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы является определение электро-механических энергий трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины с межфазными круговыми трещинами, а также определение скорости освобождения энергии на фронте трещин.

В диссертационной работе рассматриваются на два типа задачи для трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой

пластины с межфазными круговыми трещинами с привлечением геометрическо-нелинейных уравнений теории электроупругости для пьезоэлектрических материалов в рамках модели кусочно-однородного тела. Эти задачи следующие:

1. исследование по расслоению-выпучиванию лицевых PZT слоев в окрестности межфазных трещин и изучение эффекта взаимовлияния электрического и механического полей на значение соответствующих критических параметров;

2. исследование СВЭ на фронте межфазной трещины и определение влияния начального напряжения, а также, определение эффекта взаимовлияния электрического и механического полей на значение КИН и СВЭ.

Метод исследования. К решению поставленных задач применяется метод конечных элементов (МКЭ), который широко используется при решении фундаментальных задач теории упругости.

Основные положения, выносимые на защиту.

а) постановка задачи, развитие и применение численного метода конечных элементов (МКЭ) для решения соответствующих краевых задач;

б) разработка критериев для определения критических параметров, относящиеся к местному выпучиванию лицевых слоев в окрестности круговых трещин;

в) разработка алгоритмов для определения влияния начальных напряжений на значение СВЭ на фронте межфазных круговых трещин в случае моды I;

г) проведение конкретных численных исследований о влияние параметров задачи на величину критических усилий, а также на величину СВЭ;

д) анализ полученных численных результатов и выявление новых эффектов, исходящих из взаимовлияния электрического и механического полей, а также, из анизотропии пьезоэлектрических лицевых слоев.

Научная новизна исследования. Научная новизна и значимость результатов работы заключаются:

- в постановке задач об исследовании местного расслоения-выпучивания лицевых слоев в окрестности межфазных круговых трещин, а также, СВЭ на фронте этих трещин для моды I;
- в разработке МКЭ для численного решения соответствующих краевых задач теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов;
- в реализации МКЭ в пакете программ для получения численных результатов;
- в установлении некоторых электро-механических эффектов, связанных с электро-механическими свойствами пьезоэлектрических материалов, с граничными условиями, относящиеся к величинам электрического поля, с геометрическими параметрами задач.

Все рассмотренные задачи о трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины с двумя межфазными круговыми трещинами решены впервые в рамках модели кусочно-однородного тела с привлечением точных трехмерных геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов в случае осесимметричной деформации.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается:

- применением точных трехмерных геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов с привлечением кусочно-однородной модели при формулировке задачи и постановке задач;
- корректностью постановок задач, точностью вариационных формулировок этих задач при применении МКЭ;
- согласованностью полученных численных результатов между собой, физическими соображениями, достаточно хорошим совпадением с известными результатами других авторов в частных случаях.

Теоретическая и практическая значимости исследования. Исследования на основе модели кусочно-

однородного тела с привлечением точных трехмерных геометрически нелинейных уравнений теории электроупругости для пьезоэлектрических материалов, решение ряд задач для расслоения-выпучивания, а также, для разрушения трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины с двумя межфазными круговыми трещинами являются теоретической значимостью диссертации. Полученные результаты настоящей работы можно применить в конструкциях, в которых использованы пьезоэлектрические материалы с межфазными круговыми трещинами.

Апробация и применение работы. Основные положения диссертационной работы регулярно докладывались на семинарах кафедры «Общие технические предметы» факультета Физика и технические предметы Гянджинского Государственного Университета, а также на следующих научных конференциях: Turkish Physical Society, 32-nd International Physics Congress (06-09 Sep. 2016, Bodrum, Turkey), Актуальные проблемы современных естественных и экономических наук. Международная Научная Конференция, (04-05 май 2018, Гянджа).

Личный вклад автора. В работах (статьях), написанных в соавторстве с С.Д.Акбаровым и Н.Яхниоглу, автором решены поставленные задачи, используя методом конечных элементов, и обсуждены полученные результаты. В работах, написанных в соавторстве с О.Г.Рзаевым, автор отвечает за постановку задачи, получение численных результатов и их анализ.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 6 статьи, 3 тезисы и они перечислены в конце автореферата.

Название учреждения, где выполнена работа. Диссертационная работа выполнена в кафедре «Общие технические предметы» факультета Физика и технические предметы Гянджинского Государственного Университета.

Общий объем диссертации с указанием объема структурных единиц диссертации отдельно. Общий объем диссертации – 200087 знаков (титульный лист – 432 знака,

содержание – 2666 знаков, введение – 26332 знака, первая глава – 48000 знаков, вторая глава – 72000 знаков, третья глава – 46000 знаков, заключение – 4657 знаков). Диссертационная работа содержит в себя список используемой литературы 71 названия, 21 рисунок и 16 таблиц.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении определены цель и актуальность диссертационной работы, дается краткий обзор работ по теме рассматриваемых задач.

Первая глава посвящается некоторым основным соотношениям геометрически-нелинейной теории электроупругости в произвольных криволинейных координатах при малых деформациях. Под малых деформаций будем понимать вариант теории, когда удлинения и сдвиги являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими можно пренебречь. Кроме этого, согласно этому положению не будем учитывать изменение удлинений, площадей и объемов при записи уравнения равновесия и граничных условий в усилиях и в электрических перемещениях. Однако, при записи уравнений равновесия и граничных условий в усилиях и в электрических перемещениях будем учитывать изменения ориентаций (направлений) элементарных материальных волокон за счет деформаций. При этом, не будем налагать никакие ограничения над углам поворота материальных волокон. Все рассмотренные соотношения будут переписаны в цилиндрических координатах. Причем, *в первых пяти параграфах* не упоминается наличия электрического поля, хотя соотношения и уравнения, приведенные в этих параграфах, остаются в силе и для теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов.

В разделе 1.6 приводятся некоторые необходимые сведения об уравнениях теории электрического поля и о соотношениях, связывающие механических и электрических полей, относящиеся к пьезоэлектрическим материалам. Если соединим конца стержня из пьезоэлектрического материала в вольтметр и начнем сжимать этого стержня, тогда стрелка вольтметра сдвинется из нулевой точки и будет показывать определенный вольтаж, который соответствует электрическому полю появившейся за счет механического сжатия пьезоэлектрического стержня. Кроме того, если загрузим концов пьезоэлектрического стержня с электрическими

зарядами, тогда появится определенное механическое перемещение (обратный пьезоэлектрический эффект).

Отметим, что пьезоэлектрические материалы, в основном, делится на две группы: полимерные пьезоэлектрики и керамические пьезоэлектрики. Керамические пьезоэлектрики являются хрупкими материалами и деформации в них являются упругими, почти, до момента разрушения. Однако, полимерные пьезоэлектрики имеют вязкоупругие свойства.

Одним из основных свойств пьезоэлектрических материалов является их анизотропия. Другими словами, механические и электрические свойства этих материалов зависят от направления. Вместо с тем, пьезоэлектрические материалы имеют непрерывные диполь и могут быть приняты как ионизированные кристаллы которые не имеют центральные симметрии.

В настоящее время пьезоэлектрические материалы используемые в технике и промышленности изготавливаются из смеси "Свинец+Цирконий (zirkonium)+титан (titanium)". Поскольку "свинец" по греческом языке пишется как "Plumbo", поэтому такие пьезоэлектрические материалы называются как PZT, т.е. с первыми буквами названия материалов входящий в смесь. PZT материалы различаются друг от друга по количеством цирконий и титана в состава смеси и переименовуются как PZT-2, PZT-4, PZT-5 и т.д.

Кроме этих, для выявления пьезоэлектрических эффектов используются кристаллы не имеющие центральные симметрии в кристаллической решетке, так как Barium Titanat ($BaTiO_3$), Quartz (SiO_2), Cinko Oksid (ZnO) и другие.

Вторая глава посвящается исследованию расслоения–выпучивания возле межслойных круговых трещин трехслойной PZT+МЕТАЛ+PZT круговой пластины. Здесь исследуется осесимметричный случай и предполагается, что пластина сжимается в радиальном направлении равномерно распределенными нормальными усилиями, действующими на боковую поверхность пластины-диска. Постановка задачи записывается в рамках модели кусочно-однородного тела с

привлечением геометрически-нелинейных уравнений теории электроупругости для пьезоэлектрических материалов. Сформулированные задачи решаются с использованием метода возмущения формы границ, с помощью которого нелинейная задача приводится к соответствующие линейризованные задачи. Причем, эти линейризованные задачи решаются численно с привлечением Метода Конечных Элементов (МКЭ). Анализируются численные результаты о критических значениях сжимающих усилий для различных типов PZT и металлов из упругих материалов и для различных значений геометрических параметров, характеризующих отношения радиуса трещины к радиусу кругового диска и т.д.

В разделе 2.1 дается постановка задачи. Рассмотрим трехслойный круговой диск с геометрией показанной на рис. 1.а и для общности, примем, что материал всех слоев диска (или пластины) являются пьезоэлектрическими. Кроме того, примем, что материалы лицевых слоев пластин одинаковые и между средним и лицевым слоем имеются круговые трещины, расположение которых показано на рис. 1.б.

Соединим цилиндрическую систему координат $O r \theta z$ нижними лицевыми плоскостями пластины (рис.1) и положение точек этой пластины определим через Лагранжевые координаты в этой системе координат. Таким образом, согласно рис.1, пластина занимает область $\{0 \leq r \leq l/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq h\}$ и круговые трещины находится в интервалах $\{z = h_F \pm 0, 0 \leq r \leq l_0/2\}$ и $\{z = h_c + h_F \pm 0, 0 \leq r \leq l_0/2\}$, где l – диаметр диска, h – толщина диска, l_0 – диаметр кругового трещина, h_F – толщина лицевого слоя, h_c – толщина среднего слоя.

Кроме этого, примем, что в естественном состоянии поверхности трещин имеется очень незначительное и осесимметричное начальное несовершенство (или выпучивание). На рис. 1.б верхняя и нижняя поверхности

верхней трещины указаны через S_u^+ и S_u^- , а эти же поверхности для нижней трещины указаны через S_L^+ и S_L^- соответственно.

Уравнение этих поверхностей можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} z &= h_F \pm \varepsilon f(r) \quad \text{для } S_L^\pm, \\ z &= h_c + h_F \pm \varepsilon f(r) \quad \text{для } S_u^\pm, \end{aligned} \quad (1)$$

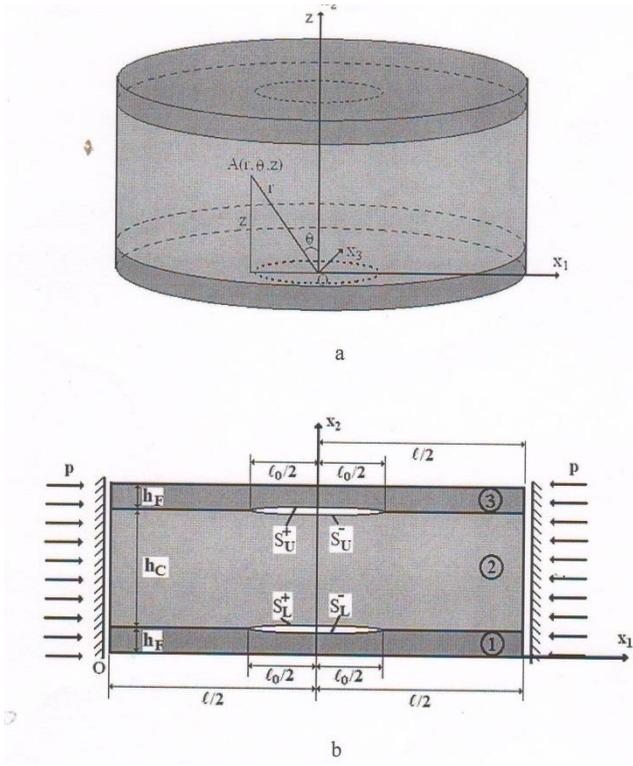


Рис. 1. Геометрия пластин и межфазных трещин.

где ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) - безразмерный малый параметр, которая характеризует степень начального несовершенства

поверхностей трещин, $f(r)$ функция, который характеризует форму начального несовершенства.

Предположим, что рассмотренная трехслойная пластина сжимается по боковой поверхности этой пластины с равномерно распределенными радиальными нормальными усилиями с интенсивностью P . Попытаемся изучать развитие вышеуказанного начального несовершенства поверхностей трещин с ростом значения P и это изучения проводим с привлечением геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов.

Итак, запишем это уравнение и при этом с верхними индексами (3) и (1) обозначим величины, относящиеся к верхнему и нижнему слою, соответственно, а верхним индексом (2) обозначим величины, относящиеся к срединному слою. Отметим, что поскольку предполагается, что геометрия пластины и начального несовершенства поверхностей трещин, а также, распределение внешних усилий имеют симметрию относительно оси Oz , поэтому все последующее исследование проведем для этого осесимметричного случая.

Таким образом, запишем полную систему уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов в геометрическо-нелинейной постановке при осесимметричном случае.

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial t_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial t_{zr}^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r}(t_{rr}^{(k)} - t_{\theta\theta}^{(k)}) = 0, \quad \frac{\partial t_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial t_{zz}^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r}(t_{rz}^{(k)}) = 0,$$

$$\frac{\partial D_R^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r}D_R^{(k)} + \frac{\partial D_Z^{(k)}}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

где

$$t_{rr}^{(k)} = \sigma_{rr}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right) + \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + M_{rr}^{(k)},$$

$$t_{\theta\theta}^{(k)} = \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(1 + \frac{u_r^{(k)}}{r} \right) + M_{\theta\theta}^{(k)},$$

$$\begin{aligned}
t_{zr}^{(k)} &= \sigma_{zr}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right) + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + M_{zr}^{(k)}, \\
t_{rz}^{(k)} &= \sigma_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \sigma_{rz}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right) + M_{rz}^{(k)}, \\
t_{zz}^{(k)} &= \sigma_{zz}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right) + \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + M_{zz}^{(k)}, \\
D_R^{(k)} &= \left(1 + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right) D_r^{(k)} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} D_z^{(k)}, \\
D_Z^{(k)} &= \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} D_r^{(k)} + \left(1 + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right) D_z^{(k)}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Электромеханические соотношения для пьезоэлектрических материалов:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(k)} &= c_{1111}^{(k)} s_{rr}^{(k)} + c_{1122}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k)} + c_{1133}^{(k)} s_{zz}^{(k)} - e_{111}^{(k)} E_r^{(k)} - e_{311}^{(k)} E_z^{(k)}, \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= c_{2211}^{(k)} s_{rr}^{(k)} + c_{2222}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k)} + c_{2233}^{(k)} s_{zz}^{(k)} - e_{122}^{(k)} E_r^{(k)} - e_{322}^{(k)} E_z^{(k)}, \\
\sigma_{zz}^{(k)} &= c_{3311}^{(k)} s_{rr}^{(k)} + c_{3322}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k)} + c_{3333}^{(k)} s_{zz}^{(k)} - e_{133}^{(k)} E_r^{(k)} - e_{333}^{(k)} E_z^{(k)}, \\
\sigma_{rz}^{(k)} &= c_{13211}^{(k)} s_{rz}^{(k)} - e_{113}^{(k)} E_r^{(k)} - e_{313}^{(k)} E_z^{(k)}, \\
D_r^{(k)} &= e_{111}^{(k)} s_{rr}^{(k)} + c_{122}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k)} + e_{133}^{(k)} s_{zz}^{(k)} + \varepsilon_{11}^{(k)} E_r^{(k)} + \varepsilon_{13}^{(k)} E_z^{(k)}, \\
D_z^{(k)} &= e_{311}^{(k)} s_{rr}^{(k)} + e_{322}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k)} + e_{333}^{(k)} s_{zz}^{(k)} + \varepsilon_{31}^{(k)} E_r^{(k)} + \varepsilon_{33}^{(k)} E_z^{(k)}, \\
M_{rr}^{(k)} &= \varepsilon_0^{(k)} \left(E_r^{(k)} E_r^{(k)} - \frac{1}{2} E^{(k)2} \right), \\
M_{\theta\theta}^{(k)} &= \varepsilon_0^{(k)} \left(\frac{1}{2} E^{(k)2} \right), \quad M_{zz}^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)} \left(E_z^{(k)} E_z^{(k)} - \frac{1}{2} E^{(k)2} \right), \\
M_{rz}^{(k)} &= M_{zr}^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)} \left(E_r^{(k)} E_z^{(k)} \right), \quad E^{(k)2} = \left(E_r^{(k)} \right)^2 + \left(E_z^{(k)} \right)^2, \\
E_r^{(k)} &= -\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial r}, \quad E_z^{(k)} = -\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial z}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Соотношения между деформациями и перемещений:

$$\begin{aligned}
s_{rr}^{(k)} &= \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right)^2, \quad s_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_r^{(k)}}{r} \right)^2, \\
s_{zz}^{(k)} &= \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right)^2, \\
s_{rz}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right). \quad (5)
\end{aligned}$$

Следует отметить, что при получении соответствующих уравнений классически линейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов принимаются во внимание следующие два предположения: (I) не учитывается разница между площадями элементарных поверхностей до и после деформаций, а также, между объемом элементарных элементов до и после деформаций; (II) не учитывается поворот «материализованных» базисных векторов в результате деформации. Однако, при получении уравнений (2)-(5) подразумевается, что деформации столь малы, что (I) предположение остается в силе, однако, отказываются от (II) предположения. Другими словами, при записи уравнений (2)-(5) учитывается разница между направлениями «материализованных» базисных векторов до и после деформаций и отказ от (II) предположения означает учет поворотов базисных векторов, вызванных деформацией при определении механических напряжений, электрических перемещений и при записи уравнений полей, а также при записи граничных условий относительно усилий.

Потом сформулируются граничные и контактные условия. При этом, относительно поверхностей трещин можем записать следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
t_{rr}^{(2)} \Big|_{S_u^+} n_r^+ + t_{zz}^{(2)} \Big|_{S_u^-} n_z^- &= 0, \quad t_{rr}^{(2)} \Big|_{S_L^+} n_r^+ + t_{zr}^{(2)} \Big|_{S_L^+} n_z^+ = 0, \\
t_{rz}^{(2)} \Big|_{S_L^+} n_r^+ + t_{zz}^{(2)} \Big|_{S_L^+} n_z^+ &= 0, \quad (6) \\
t_{rr}^{(1)} \Big|_{S_L^-} n_r^- + t_{zr}^{(1)} \Big|_{S_L^-} n_z^- &= 0, \quad t_{rz}^{(1)} \Big|_{S_L^-} n_r^- + t_{zz}^{(1)} \Big|_{S_L^-} n_z^- = 0.
\end{aligned}$$

Отметим, что условия (6) удовлетворяются при $0 \leq r \leq l_0/2$, однако, при $l_0/2 \leq r \leq l/2$ имеют место следующие контактные условия:

$$\begin{aligned}
 t_{zz}^{(3)} \Big|_{z=h_F+h_C} &= t_{zz}^{(2)} \Big|_{z=h_F+h_C}, & t_{zr}^{(3)} \Big|_{z=h_F+h_C} &= t_{zr}^{(2)} \Big|_{z=h_F+h_C}, \\
 u_z^{(3)} \Big|_{z=h_F+h_C} &= u_z^{(2)} \Big|_{z=h_F+h_C}, & u_r^{(3)} \Big|_{z=h_F+h_C} &= u_r^{(2)} \Big|_{z=h_F+h_C}, \\
 t_{zz}^{(2)} \Big|_{z=h_F} &= t_{zz}^{(1)} \Big|_{z=h_F}, & t_{zr}^{(2)} \Big|_{z=h_F} &= t_{zr}^{(1)} \Big|_{z=h_F}, \\
 u_z^{(2)} \Big|_{z=h_F} &= u_z^{(1)} \Big|_{z=h_F}, & u_r^{(2)} \Big|_{z=h_F} &= u_r^{(1)} \Big|_{z=h_F}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В разделе 2.2. излагается метод решения поставленной задачи, при этом решение включает в себя нескольких этапов математических процедур. Сначала дается представление искомых величин в виде ряда по малому параметру и получение уравнений для каждого приближения, определяются величины нулевого приближения и величины, относящиеся к первому приближению.

Для решения задачи, сформулированная в предыдущем параграфе, применим метод, развитый в монографии¹ для чисто упругих и вязкоупругих материалов. Согласно этому методу, все искомые величины представляются в виде ряда по малому параметру \mathfrak{R} , который входит в уравнения (1) и характеризует степень несовершенства поверхностей трещин:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \sigma_{rr}^{(k)}, \dots, u_r^{(k)}, \dots, D_r^{(k)}, \dots, \phi^{(k)} \right\} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left\{ \sigma_{rr}^{(k),n}, \dots, u_r^{(k),n}, \dots, D_r^{(k),n}, \dots, \phi^{(k),n} \right\}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Получая выражение для составляющих n_r^{\pm} и n_z^{\pm} нормального вектора к поверхности трещин, представленные уравнением в (1) и представляя эти же выражения также в виде

¹ Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. New York: Springer, 2013, 448p.

ряда по малому параметру ε , далее подставляя (8) в нелинейные уравнение и соотношение приведенные в предыдущем параграфе, производя громоздкие математические преобразования и разработки, получаем соответствующее уравнение и соотношение для каждого приближения в (8) в отдельности. Здесь эти уравнения и соотношения запишем только для нулевого и первого приближения при записи уравнений, относящихся к нулевому приближению, пренебрегаем с нелинейностью в них. Итак, запишем эти уравнения и соотношения для нулевого приближения:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),0} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} &= 0, \\ \frac{\partial D_r^{(k),0}}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r^{(k),0} + \frac{\partial D_z^{(k),0}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношение между деформациями и механическими перемещениями:

$$\begin{aligned} s_{rr}^{(k),0} &= \frac{\partial u_r^{(k),0}}{\partial r}, \quad s_{\theta\theta}^{(k),0} = \frac{u_r^{(k),0}}{r}, \quad s_{zz}^{(k),0} = \frac{\partial u_z^{(k),0}}{\partial z}, \\ s_{rz}^{(k),0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k),0}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),0}}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия на поверхностях трещин:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}^{(3),0} \Big|_{z=h_F+h_C} &= 0, \quad \sigma_{zz}^{(3),0} \Big|_{z=h_F+h_C} = 0, \quad \sigma_{zr}^{(2),0} \Big|_{z=h_F+h_C} = 0, \\ \sigma_{zz}^{(2),0} \Big|_{z=h_F+h_C} &= 0, \quad \sigma_{zr}^{(2),0} \Big|_{z=h_F} = 0, \quad \sigma_{zr}^{(1),0} \Big|_{z=h_F} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} \Big|_{z=h_F} = 0, \\ &\text{при } 0 \leq r \leq l_0/2. \end{aligned} \quad (11)$$

Контактные условия между слоями пластин:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(3),0} \Big|_{z=h_F+h_C} &= \sigma_{zz}^{(2),0} \Big|_{z=h_F+h_C}, \quad \sigma_{zr}^{(3),0} \Big|_{z=h_F+h_C} = \sigma_{zr}^{(2),0} \Big|_{z=h_F+h_C}, \\ u_z^{(3),0} \Big|_{z=h_F+h_C} &= u_z^{(2),0} \Big|_{z=h_F+h_C}, \quad u_r^{(3),0} \Big|_{z=h_F+h_C} = u_r^{(2),0} \Big|_{z=h_F+h_C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(2),0} \Big|_{z=h_F} &= \sigma_{zz}^{(1),0} \Big|_{z=h_F}, \quad \sigma_{zr}^{(2),0} \Big|_{z=h_F} = \sigma_{zr}^{(1),0} \Big|_{z=h_F}, \\ u_z^{(2),0} \Big|_{z=h_F} &= u_z^{(1),0} \Big|_{z=h_F}, \quad u_r^{(2),0} \Big|_{z=h_F} = u_r^{(1),0} \Big|_{z=h_F}, \end{aligned}$$

при $l_0/2 \leq r \leq l/2$. (12)

Потом даются граничные условия на лицевых плоскостях лицевых слоев, граничные условия на цилиндрической боковой поверхности, граничные условия на поверхности трещин относительно электрического перемещения или относительно электрического потенциала, контактные условия для электрического перемещения и электрического потенциала, граничные условия лицевых плоскостях лицевых слоев для электрического перемещения или для электрического потенциала, граничные условия на цилиндрической боковой поверхности для электрического перемещения и для электрического потенциала.

Теперь рассмотрим уравнение и соотношение, относящиеся к первому приближению. Отметим, что при получении этих уравнений и соотношений предполагается, что $\sigma_{rz}^{(k),0} = \sigma_{zz}^{(k),0} = 0$ и

$$\left\{ \partial u_r^{(k),0} \Big|_{\partial r}; \partial u_z^{(k),0} \Big|_{\partial r}; \partial u_r^{(k),0} \Big|_{\partial z}; \partial u_z^{(k),0} \Big|_{\partial z} \right\} \ll 1.$$

Таким образом, получаем следующие уравнения и соотношения для первого приближения:

уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial t_{zr}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (t_{rr}^{(k),1} - t_{\theta\theta}^{(k),1}) &= 0, \quad \frac{\partial t_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial t_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} t_{rz}^{(k),1} = 0, \\ \frac{\partial D_R^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} D_R^{(k),1} + \frac{\partial D_Z^{(k),1}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} t_{rr}^{(k),1} &= \sigma_{rr}^{(k),1} + \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + M_{rr}^{(k),1}, \\ t_{\theta\theta}^{(k),1} &= \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} + \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{u_r^{(k),1}}{r} + M_{\theta\theta}^{(k),1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{zr}^{(k),1} &= \sigma_{zr}^{(k),1} + M_{zr}^{(k),1}, t_{rz}^{(k),1} = \sigma_{rr}^{(k),1} + \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + M_{rz}^{(k),1}, \\
t_{zz}^{(k),1} &= \sigma_{zz}^{(k),1} + M_{zz}^{(k),1}, D_R^{(k),1} = D_r^{(k),1} + D_r^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} D_z^{(k),0}, \\
D_Z^{(k),1} &= D_z^{(k),1} + D_z^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + D_r^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r}, \\
M_{rr}^{(k),1} &= E_r^{(k),0} E_r^{(k),1} - E_z^{(k),0} E_z^{(k),1}, M_{\theta\theta}^{(k),1} = E_r^{(k),0} E_r^{(k),1} - E_z^{(k),0} E_z^{(k),1}, \\
M_{zz}^{(k),1} &= E_z^{(k),0} E_z^{(k),1} - E_r^{(k),0} E_r^{(k),1}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Соотношение между деформациями и механическими перемещениями:

$$\begin{aligned}
s_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, s_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{u_r^{(k),1}}{r}, s_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}, \\
s_{rz}^{(k),1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} \right). \tag{15}
\end{aligned}$$

Опять представляются соответствующие граничные и контактные условия.

Необходимо также добавить электро-механические соотношения, полученные для каждого приближения. Запишем эти соотношения для нулевого приближения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(k),0} &= c_{11}^{(k)} s_{rr}^{(k),0} + c_{12}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),0} + c_{13}^{(k)} s_{zz}^{(k),0} - e_{11}^{(k)} E_r^{(k),0} - e_{31}^{(k)} E_z^{(k),0}, \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k),0} &= c_{12}^{(k)} s_{rr}^{(k),0} + c_{22}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),0} + c_{23}^{(k)} s_{zz}^{(k),0} - e_{12}^{(k)} E_r^{(k),0} - e_{32}^{(k)} E_z^{(k),0}, \\
\sigma_{zz}^{(k),0} &= c_{13}^{(k)} s_{rr}^{(k),0} + c_{23}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),0} + c_{33}^{(k)} s_{zz}^{(k),0} - e_{13}^{(k)} E_r^{(k),0} - e_{33}^{(k)} E_z^{(k),0}, \\
\sigma_{rz}^{(k),0} &= c_{44}^{(k)} s_{rz}^{(k),0} - e_{15}^{(k)} E_r^{(k),0} - e_{35}^{(k)} E_z^{(k),0}, \\
D_r^{(k),0} &= e_{11}^{(k)} s_{rr}^{(k),0} + e_{12}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),0} + e_{13}^{(k)} s_{zz}^{(k),0} + e_{11}^{(k)} E_r^{(k),0} + e_{13}^{(k)} E_z^{(k),0}, \\
D_z^{(k),0} &= e_{31}^{(k)} s_{rr}^{(k),0} + e_{32}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),0} + e_{33}^{(k)} s_{zz}^{(k),0} + e_{31}^{(k)} E_r^{(k),0} + e_{33}^{(k)} E_z^{(k),0}, \\
M_{rr}^{(k),0} &= M_{\theta\theta}^{(k),0} = M_{rz}^{(k),0} = M_{zr}^{(k),0} = 0, \\
E_r^{(k),0} &= -\frac{\partial \phi^{(k),0}}{\partial r}, E_z^{(k),0} = -\frac{\partial \phi^{(k),0}}{\partial z}, \tag{16}
\end{aligned}$$

Аналогично можно записать также электро-механические соотношение для первого приближения.

Для определения критических параметров, которые определяют расслоение-выпучивание кругового трехслойного диска с двумя межфазными круговыми трещинами, достаточно использовать только нулевое и первое приближение².

В разделе 2.3 даются некоторые необходимые сведения о методе конечных элементов.

В разделе 2.4 проводятся численные результаты и их анализы. Здесь выбираются формы начального несовершенства поверхностей трещин, объясняется критерия местного выпучивания, выбор материала слоев и тестирование алгоритма вычисления. Во второй главе диссертационной работы приведены многие численные результаты в виде таблиц, из которых можно сделать более конкретные выводы для более конкретных случаев.

В третьей главе рассматривается трехслойную PZT+Упругая+PZT круговую пластину с межслойными круговыми трещинами и, в отличие от предыдущей главы, где поверхности трещин не имеют никаких начальных несовершенств и эти поверхности совпадают над межслойными плоскостями. Кроме того, предполагается, что сначала пластина нагружается с равномерно распределенными радиальными нормальными усилиями, действующие на цилиндрической боковой поверхности и напряженная состояния вызванная с этими нагружениями называем начальные напряжение. Затем, предполагаем, что поверхности трещин нагружается с нормальным открывающими усилиями, в результате чего появляется концентрация напряжение на фронте трещин и изучается Скорость Выпуска Энергии (СВЭ) и Тотальная Электро-Механическая Энергия рассмотренной пластины. При этом исследование проводится с привлечением трехмерной

² Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. New York: Springer, 2013, 448p.

линеаризованной теории электроупругости, которая позволяет учитывать наличие начальных напряжений на значению СВЭ.

В разделе 3.1 сначала излагается постановка задачи для определения начального состояния (первый этап), а потом постановка задачи, относящейся ко второму этапу. Предполагается, что в первом этапе электромеханическое состояние в рассмотренной пластине можно определить в рамках линейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов для лицевых слоев и в рамках линейной теории упругости для среднего слоя. Основным моментом формулировки задачи, относящейся ко второму этапу, являются следующие. Чтобы увеличить влияние начального электро-механического состояния на величины проявленные на втором этапе, необходимо отказаться от линейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Отметим, что учет указанного влияния можно учитывать (в рамках определенных допущений) в рамках линеаризованной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Исходя из этого положения постановка задачи относящиеся ко второму этапу сформулируем в рамках указанных линеаризованных теорий и тем самым обеспечим возможность учета влияния начального состояния на величину искомых величин проявленные за счет дополнительного нагружения действующие на поверхности трещин.

В разделе 3.2 определяются величины, относящиеся к начальному (к первому) и к возмущенному (т.е. ко второму этапу) состояния в отдельности.

Согласно принципу Сен-Венану, можем принимать, что при $0 \leq r < (l/2 - h)$ в начальном состоянии напряжения в пластине определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(k)0} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(k)0} = 0, \quad s_{zz}^{(k)0} = 0, \\ s_{rr}^{(k)0} = s_{\theta\theta}^{(k)0} = \text{const}_k, \quad \sigma_{rr}^{(k)0} = \sigma_{\theta\theta}^{(k)0} = \text{const}_{1k}. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно граничным условием относительно электрического перемещения можем принимать, что

$$D_z^{(k)0} = D_r^{(k)0} = 0, \quad k = 1, 3. \quad (18)$$

Используя (18) и электромеханические соотношения в предыдущем разделе получаем:

$$\begin{aligned} E_r^{(k)0} &= a_1^{(k)} s_{rr}^{(k)0} + b_1^{(k)} s_{zz}^{(k)0}, \\ E_z^{(k)0} &= d_1^{(k)} s_{rr}^{(k)0} + c_1^{(k)} s_{zz}^{(k)0}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(k)} &= \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}(e_{31}^{(k)} + e_{32}^{(k)}) - \varepsilon_{33}^{(k)}(e_{11}^{(k)} + e_{22}^{(k)})}{\varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} - \varepsilon_{13}^{(k)} \varepsilon_{31}^{(k)}}, \\ b_1^{(k)} &= \frac{\varepsilon_{13}^{(k)} e_{33}^{(k)} - \varepsilon_{33}^{(k)} e_{13}^{(k)}}{\varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} - \varepsilon_{13}^{(k)} \varepsilon_{31}^{(k)}}, \quad c_1^{(k)} = \frac{\varepsilon_{11}^{(k)} e_{33}^{(k)} - \varepsilon_{31}^{(k)} e_{13}^{(k)}}{\varepsilon_{13}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} - \varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)}}, \\ d_1^{(k)} &= \frac{\varepsilon_{11}^{(k)}(e_{31}^{(k)} + e_{32}^{(k)}) - \varepsilon_{31}^{(k)}(e_{11}^{(k)} + e_{12}^{(k)})}{\varepsilon_{13}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} - \varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Принимая во внимание равенства $\sigma_{zz}^{(j)0} = 0$, можем записать:

$$\begin{aligned} s_{zz}^{(j)0} &= a_{zr}^{(j)} s_{rr}^{(j)0}, \\ a_{zr}^{(k)} &= \frac{c_{13}^{(k)} + c_{32}^{(k)} - e_{13}^{(k)} a_1^{(k)} - e_{33}^{(k)} d_1^{(k)}}{c_{33}^{(k)} - e_{13}^{(k)} b_1^{(k)} - e_{33}^{(k)} c_1^{(k)}}, \quad k=1,3, \\ a_{zr}^{(2)} &= \frac{2\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая (21) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(j)0} &= A_r^{(j)} s_{rr}^{(j)0} \\ A_r^{(k)} &= c_{11}^{(k)} + c_{12}^{(k)} - e_{11}^{(k)} a_1^{(k)} + a_{zr}^{(k)} c_{13}^{(k)} - a_{zr}^{(k)} e_{11}^{(k)} b_1^{(k)} - a_{zr}^{(k)} e_{31}^{(k)} c_1^{(k)} \\ A_r^{(2)} &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Принимая во внимание, что

$$s_{rr}^{(1)0} = s_{rr}^{(2)0}, \quad 2h_f \sigma_{rr}^{(1)0} + h_c \sigma_{rr}^{(2)0} = hq. \quad (23)$$

Таким образом, из (22) и (23) определяем следующее выражение:

$$\sigma_{rr}^{(1)0} = q \left(2 \frac{h_F}{h} + \frac{h_C}{h} \frac{A_r^{(2)}}{A_r^{(1)}} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Итак, величины, относящиеся к начальному состоянию, определяем через выражении (17)-(24). Напомним, что эти выражения являются действительными при $0 \leq r < (l/2 - h)$ и получены в случае, когда материалы лицевых слоев одинаковы.

Краевые контактные задачи, относящиеся ко второму этапу, невозможно решать аналитически и поэтому применяем МКЭ для решения этих задач. Для применения МКЭ для решения краевой задачи введем следующий функционал³⁴:

$$\begin{aligned} & \Pi(u_r^{(1)}, u_r^{(2)}, u_r^{(3)}, u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, u_z^{(3)}, \phi^{(1)}, \phi^{(3)}) = \\ & = \frac{1}{2} 2\pi \sum_{k=1}^3 \iint_{\Omega^{(k)}} \left[t_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + t_{\theta\theta}^{(k)} \frac{u_r^{(k)}}{r} + t_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \right. \\ & \quad \left. + t_{zr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + t_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right] r dr dz + \\ & + \frac{1}{2} 2\pi \iint_{\Omega^{(1)}} [E_r^{(1)} D_r^{(1)} + E_z^{(1)} D_z^{(1)}] r dr dz + \\ & - \frac{1}{2} 2\pi \iint_{\Omega^{(3)}} [E_r^{(3)} D_r^{(3)} + E_z^{(3)} D_z^{(3)}] r dr dz - \\ & - 2\pi \int_0^{l_0/2} p u_z^{(1)} \Big|_{z=h_F} r dr - 2\pi \int_0^{l_0/2} p u_r^{(2)} \Big|_{z=h_F} r dr - \\ & - 2\pi \int_0^{l_0/2} p u_z^{(2)} \Big|_{z=h_F+h_C} r dr - 2\pi \int_0^{l_0/2} p u_z^{(3)} \Big|_{z=h_F+h_C} r dr. \end{aligned} \quad (25)$$

где

³ Yang Y.S. An introduction to the theory of piezoelectricity. New York. Springer 2005, 282p.

⁴ Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. New York: Springer, 2013, 448p.

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= \{0 \leq r \leq l/2; 0 \leq z \leq h_F\} - \{z = h_F - 0; 0 \leq r \leq l_0/2\} \\
\Omega^{(2)} &= \{0 \leq r \leq l/2; h_F \leq z \leq h_F + h_C\} - \{z = h_F + 0; 0 \leq r \leq l_0/2\} \\
&\quad - \{z = h_F + h_C - 0; 0 \leq r \leq l_0/2\} \\
\Omega^{(3)} &= \{0 \leq r \leq l/2; h_F + h_C \leq z \leq 2h_F + h_C\} - \\
&\quad - \{z = h_F + h_C + 0; 0 \leq r \leq l_0/2\}. \tag{26}
\end{aligned}$$

Отметим, что функционал (25), с очевидными изменениями совпадает с функционалом, приведенным в предыдущей главе. Поэтому, операции проведенные над функционалом (25) для МКЭ моделирования совпадает с соответствующими операциями изложенные в предыдущей главе. Благодаря к этому положению, здесь не рассматривается изложения этих операций.

Таким образом, определяя значение механических перемещений и электрического потенциала в узловых точках, определяем значение перемещений и электрического потенциала в пределах каждого конечного элемента. Далее, после определения перемещений и потенциала, используя соотношение (2), (3) и (4) определяем все искомые величины в пределах каждого конечного элемента и в пределах всего пластина.

Имея под рукой значений напряженно-деформированного состояния в пластине и используя формулу⁵

$$\gamma = \frac{\partial u}{\pi l_0 \partial l_0} \tag{27}$$

определяем СВЭ (т.е. γ) на фронте кругового трещина, где значение U вычисляются из следующего интеграла:

⁵ Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974, 640с.

⁶ Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983, 298с.

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} 2\pi \sum_{k=1}^3 \iint_{\Omega^{(k)}} \left[t_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + t_{\theta\theta}^{(k)} \frac{u_r^{(k)}}{r} + t_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + t_{zr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \right. \\
& \left. + t_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right] r dr dz + \frac{1}{2} 2\pi \iint_{\Omega^{(1)}} \left[E_r^{(1)} D_r^{(1)} + E_z^{(1)} D_z^{(1)} \right] r dr dz + \\
& + \frac{1}{2} 2\pi \iint_{\Omega^{(3)}} \left[E_r^{(3)} D_r^{(3)} + E_z^{(3)} D_z^{(3)} \right] r dr dz. \tag{28}
\end{aligned}$$

Отметим, что l_0/b в (27) является радиусом круговой трещины.

В разделе 3.3 проводятся численные результаты и анализы этих результатов. В этих исследованиях материалы лицевых слоев выберем $PZT-4$, $PZT-5H$ и $BaTiO_3$, а материалы среднего слоя выберем Al (алюминий) и St (сталь).

В данном разделе будем представлять и анализировать численные результаты, относящиеся электро-механической энергии U и скорость выпуска энергии (СВЭ) γ на фронте круговой трещины. Чтобы определить эффект взаимовлияния механических и электрических полей на эти численные результаты будем рассматривать следующие два случая (таблицы 1 и 2):

случай 1

$$e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(3)} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(3)} = 0, \tag{29}$$

случай 2

$$e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(3)} \neq 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(3)} \neq 0. \tag{30}$$

Отметим, что численные результаты, относящиеся к случаю 1 показывают значение чисто механические энергии и СВЭ. Однако, численные результаты относящиеся к случаю 2 показывают значение энергии и СВЭ при полном учете взаимовлияния между механических и электрических полей.

В пункте 3.3.1 анализируются тестирования конечного элементного моделирования и ПК программ.

В пункте 3.3.2 излагаются численные результаты, относящиеся к энергиям и СВЭ, проводятся их анализы.

Сначала рассматривается случай, когда начальное напряжение в пластине отсутствует, т.е. рассмотрим случай когда $q = 0$. При этом рассмотрим случай 2 (30) и различим следующие энергии:

- тотальная электро-механическая энергия;
- чисто механическая энергия, здесь предполагается, что $e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(3)} = 0$, $\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(3)} = 0$;
- энергия взаимовлияния;
- чисто электрическая энергия.

Численные результаты, иллюстрирующие влияние радиуса трещин на значение вышеуказанных энергий, проявленное в пластинах $PZT - 5H|Al|PZT - 5H$ и $PZT - 5H|St|PZT - 5H$ приведены в виде графиков. Отметим, что при получении этих результатов предполагалось, что $q|C_{44}^{PZT-5H} = 0$ (т.е. начальное напряжение в пластине отсутствуют) и $h_F / l = 0.025$.

Таблица 1. Сходимость численных результатов в зависимости от количества конечных элементов в радиальном направлении в случае, когда $l_0 / l = 0.5$, $h_F / l = 0.05$ и $h_C / l = 0.1$; количество конечных элементов в направлении оси Oz равно 12 и рассматривается $PZT - 5H|Al|PZT - 5H$ пластина.

Количество конечных элементов в радиальном направлении	Число свободных вариаций	$\gamma(C_{44}^{PZT-5H} l)$	
		Случай 1	Случай 2
40	5039	5.17384	3,74138
60	7559	5.25945	3.80980
80	10079	5.31453	3.85354

100	12599	5.35750	3.88634
120	15119	5.39413	3.91292
140	17639	5.42579	3.93496
160	20159	5.45335	3.95347
200	25199	5.49826	3.98258
300	37799	5.56864	4.02635
400	50399	5.60464	4.04842
500	62999	5.62642	4.06177

Таблица 2. Сходимость численных результатов в зависимости от количества конечных элементов в направлении оси Oz в случае когда $l_0/l = 0.5$, $h_F/l = 0.05$, $h_F/l = 0.1$, количество конечных элементов в направлении равно 100 и рассматривается $PZT - 5H|Al|PZT - 5H$ пластина.

Количество конечных элементов в направлении Oz	Число свободных вариаций	$\gamma \left(c_{44}^{PZT-5H} l \right)$	
		Случай 1	Случай 2
12	12599	5.35750	3.88634
18	18599	5.33552	3.86970
20	20599	5.33017	3.86545
24	24599	5.32377	3.85928
28	28599	5.32045	3.85535
30	39599	5.31515	3.85174
40	40599	5.30807	3.84444

Автор искренне благодарит своему научному руководителю д.ф.-м.н., проф. Оруджали Гусейнгулу оглу Рзаеву за постоянное внимание и ценные советы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе рассмотрено и исследовано два типа осесимметричных задач. Первая из них является задача о местном выпучивании трехслойной PZT+Упругая+PZT пластины с межслойными круговыми трещинами, вторая является задача о разрушении (т.е. об изучение СВЭ) указанной пластины, также, с межслойными круговыми трещинами. Эти задачи решены с привлечением трехмерных линейризованных теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Соответствующие краевые задачи решены численно с привлечением МКЭ.

При решении первой задачи искомые величины представляются в виде ряда по малому параметру, которые характеризуют степень начального несовершенства поверхностей трещин. С привлечением соответствующих математических выкладок получается соответствующая замкнутая система уравнений и граничные условия для каждого приближения в отдельности из соответствующих уравнений и соотношений геометрическо-нелинейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Устанавливается, что уравнения и соотношения, полученные для первого и последующих приближений совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями с трехмерной линейризованной теории устойчивости для пьезоэлектрических материалов. Определения критических значений сжимающего усилия проводится в рамках только нулевого и первого приближения с привлечением критерия начального несовершенства.

Конкретные численные результаты получаются для $PZT-5H|Al|PZT-5H$, $PZT-4|Al|PZT-4$, $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$, $PZT-5H|St|PZT-5H$, $PZT-4|St|PZT-4$ и $BaTiO_3|St|BaTiO_3$ пластин. Эти результаты одновременно представлены как безразмерная радиальная нормальная напряжения $\sigma_{cr}^{(1)}$ действующий в лицевом пьезоэлектрическом слое, как $\sigma_{cr}^{(2)}$

безразмерная радиальная нормальная напряжения в среднем упругом слое и как \bar{P}_{cr} безразмерная интенсивность внешних равномерно распределенных сжимающих нормальных усилий действующий на боковой цилиндрической поверхности пластин. Согласно этим результатам, можно сделать следующие конкретные выводы:

- значение $\sigma_{cr}^{(1)}$, $\sigma_{cr}^{(2)}$ и \bar{P}_{cr} уменьшаются с уменьшением толщины лицевых слоев и с увеличением радиуса круговых трещин;
- во всех рассмотренных случаях пьезоэлектричество лицевых слоев приводит к увеличению значений $\sigma_{cr}^{(1)}$ и с ростом толщины лицевых слоев эта увеличения становится более значительным;
- характер влияния пьезоэлектричества материалов лицевых слоев по значений $\sigma_{cr}^{(2)}$ и \bar{P}_{cr} зависит от электро-механических и геометрических свойства слоев пластин: как правила, для сравнительно тонкий (толстый) лицевого слоя и для сравнительно длинного (краткого) трещина, пьезоэлектричество лицевых слоев приводит к уменьшению (к увеличению) значений $\sigma_{cr}^{(2)}$ и \bar{P}_{cr} .

Однако, величины, указанных "увеличений" и "уменьшений", значительно мало чем соответствующие "увеличение" или "уменьшение" полученные для $\sigma_{cr}^{(1)}$:

- значения $\sigma_{cr}^{(1)}$, $\sigma_{cr}^{(2)}$ и \bar{P}_{cr} полученные для пластин материал среднего слоя у которого является *St* (сталь) больше чем их соответствующие значение полученные для пластин материал среднего слоя у которого является *Al* (алюминий);
- более чувствительным критическим параметром для определения влияния пьезоэлектричество по местному выпучиванию лицевого слоя возле межслойного трещина, является $\sigma_{cr}^{(1)}$.

При решении второй задачи, предполагается, что круговая трехслойная пластина имеющая межслойные круговые трещины, сначала, сжимается равномерно распределенными нормальными усилиями в радиальном направлении и эти усилия действуют на цилиндрическую боковую поверхность пластины. Напряженное состояние в пластине вызванный с этими усилиями называется начальным напряжением. После этого, предполагается, что на поверхности трещин прилагается равномерно распределенные нормальные "открывающие" усилия и требуется определения СВЭ и энергии появившиеся за счет этих усилий, с учетом влияния начальных напряжений на величину вызванные также с этими усилиями.

Исследование проводится с привлечением трехмерной линеаризованной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов и конкретные численные результаты получаются с применением МКЭ для пластин $PZT-5H|Al|PZT-5H$, $PZT-4|Al|PZT-4$, $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$, $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$. Согласно этим результатам можно сделать следующие конкретные выводы:

- пьезоэлектричество материала лицевых слоев приводит к уменьшению значения тотальной электромеханической энергии и величины этого уменьшения увеличиваются с ростом l_0/l и с уменьшением h_F/l , где $l_0/2$ ($l/2$)-радиус круговой трещины (радиус круговой пластины), h_F -толщина лицевого слоя. Следовательно, параметры l_0/l и h_F/l характеризуют не только размеры круговой трещины и толщины лицевого слоя, а также размеры всего круговой пластины;
- начальное сжатие (растяжение) пластины в радиальном направлении приводит к увеличению (уменьшению) в значениях СВЭ; в случае начального сжатия значение СВЭ увеличивается неограниченно при приближении сжимающего усилия к соответствующим критическим усилиям;
- пьезоэлектричество материала лицевых слоев приводит к уменьшению значений СВЭ;

- Значения СВЭ увеличиваются (уменьшаются) с ростом l_0/l (с ростом h_F/l);
- величины СВЭ зависят не только от электромеханических свойств материалов лицевых слоев, а также от механических свойств материала среднего слоя;
- численные результаты полученной для второй задачи в качественном и количественном смысле согласуются с результатами, полученными ранее исследовательских работ.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Cafarova F.I., Rzayev O.A. A stability loss of the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc under "open-circuit" condition//Transactions of NAS of Azerbaijan, issue mechanics. 2016, v.36, №4, p.50-59.
2. Cafarova F.I., Akbarov S.D., Yahnioglu N. Buckling delamination of the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc with penny-shaped interface cracks.//Smart Structures and Systems, 2017, v.19, №2, p.163-179.
3. Akbarov S.D., Cafarova F.I., Yahnioglu N. Buckling delamination of the circular sandwich plate with piezoelectric face and elastic core layers under rotationally symmetric external pressure//AIP conference Proceeding 1815, 080001(2017); doi:10/1063/1.4976433, Turkish Physical Society 32-nd International Physics Congress (TPS32)
4. Cafarova F.I., Rzayev O.A. On the influence of the "short-and open-circuit" conditions on stability loss of the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc condition//Caspian Journal of Applied Mathematics, ecology and economics. Inter. Academy, Baku,ISSN:1560-4055, 2017,v.5, №2, p.26-28.
5. Cafarova F.I. FEM analysis of the problem related to the penny-shaped interface cracks contained in the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate// "Актуальные проблемы современных естественных и экономических наук ". Международная Научная Конференция. 04-05 мая 2018, стр. 271-277.

6. Cafarova F.I. On the problem formulation and solution method of the penny shaped interface crack problems related to the Elastic/PZT/Elastic sandwich circular plate // "Актуальные проблемы современных естественных и экономических наук ". Международная Научная Конференция. 04-05 мая 2018, стр. 309-312.
7. Cafarova F.I. Electro-mechanical energies of the PZT/Elastic/PZT sandwich circular plate with penny-shaped interface cracks under action of the normal opening forces on the cracks edges// Transactions of NAS of Azerbaijan, issue mechanics. 2018, v.38, №7, p.
8. Cafarova F.I. Energy release rate at the front of penny-shaped interface cracks contained in the PZT/Elastic/PZT sandwich circular plate under action of the normal opening forces on the cracks edges// Journal of Cont. Applied Math. v.8, 2018, p.25-46.
9. Akbarov S.D., Cafarova F.I., Yahnioglu N. The influence of initial stresses on energy release rate and total electro-mechanical potential energy for penny-shaped interface cracks in PZT/Elastic/PZT sandwich circular plate-disc// Smart Structures and Systems. v.22, №3, 2018, p.259-276.

Защита диссертации состоится **14 декабря 2021** года в **14⁰⁰** на заседании Диссертационного совета FD 2.17, действующего на базе Бакинского Государственного Университета.

Адрес: город Баку, улица акад.З.Халилова, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **12 ноября 2021** года.

Подписано в печать: 19.10.2021

Формат бумаги: 60×84 1/16

Объём: 40000

Тираж: 70